Réduction des endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

I. Sous-espaces stables

1°) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Déf : Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u ssi $u(F) \subset F$ i.e. $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

Prop : Si F et G sont stables par u alors $F+G$ et $F \cap G$ aussi.

Prop : Si F est stable par u et v alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ F est stable pour $\lambda u + \mu v$.

Ainsi l'ensemble des endomorphismes laissant stable F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Théorème :

Si u et v commutent alors $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.

2°) Endomorphisme induit

Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. On peut considérer la restriction de u au départ de F et à l'arrivée dans F, restriction qui est clairement linéaire.

Déf : L'endomorphisme ainsi défini est appelé endomorphisme induit par u sur F, on le note u_F.

Prop : Si F est stable pour u alors $\ker u_F = \ker u \cap F$.

Prop : Si F est stable pour u et v alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda u + \mu v)_F = \lambda u_F + \mu v_F$.

3°) Interprétation matricielle

On suppose E de dimension finie.

Théorème :

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à F. On a équivalence entre :

(i) F est stable par u,

(ii) la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$

De plus, si tel est le cas, A est alors de la matrice de u_F dans $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Théorème :

Soit F et G supplémentaires deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On a équivalence entre :

(i) F et G sont stables par u,

(ii) la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$.

De plus, si tel est le cas, A et B sont respectivement les matrices de u_F et u_G dans $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Cor : Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. On a équivalence entre :

(i) chaque F_i est stable par u

(ii) la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_p \end{pmatrix}$.

II. Eléments propres d'un endomorphisme

1°) Valeur propre et vecteur propre

Prop : Une droite vectorielle engendrée par un vecteur x est stable pour $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Déf : On appelle valeur propre de u tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe $x \in E$ non nul vérifiant $u(x) = \lambda x$. Le vecteur x est alors appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

2°) Spectre d'un endomorphisme

Déf : On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u , on le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Prop : $0 \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow u$ n'est pas injectif.

Prop : Si $u \in GL(E)$: $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{1/\lambda / \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Prop : Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u)$.

3°) Sous-espaces propres

Déf : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$.
$E_\lambda(u)$ est le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$.

Théorème :
On a équivalence entre :
(i) λ est valeur propre de u ,
(ii) $E_\lambda(u) \neq \{0\}$,
(iii) l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injectif.

Déf : Si λ est valeur propre de u alors $E_\lambda(u)$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Théorème :
Si u et v commutent alors les sous-espaces propres de u sont stables par v .

4°) Supplémentarité des sous-espaces propres

Théorème :
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Cor : Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

III. Polynômes d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (même pour $u = 0$) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ \cdots \circ u$ (n termes).

1°) Morphisme d'évaluation

Déf : Pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on appelle valeur de P en u l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$.

Théorème :
L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres.

Déf : On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ l'image du morphisme précédent. Ses éléments sont appelés polynômes en u .

Théorème :
$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ appelée sous-algèbre engendrée par u .
C'est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u .

Cor : Les polynômes en u commutent entre eux.

Prop : Si v commute avec u alors v commute avec les polynômes en u.

2°) Polynôme annulateur

Déf : On dit que $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u ssi $P(u) = 0$.

Théorème :

L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Cor : Si P est annulateur et si $P \mid Q$ alors Q est annulateur.

3°) Polynôme minimal

Théorème :

S'il existe des polynômes non nuls annulateur de u alors il existe un unique polynôme unitaire Π_u tel que l'idéal des polynômes annulateurs de u soit $\Pi_u.\mathbb{K}[X]$.

Déf : S'il existe des polynômes non nuls annulateurs de u alors le polynôme Π_u définit ci-dessus est appelé polynôme minimale de u.

Prop : Π_u est unitaire $\Pi_u(u) = 0$.

$P(u) = 0 \Rightarrow \Pi_u \mid P$.

$P(u) = 0$ et $\deg P < \deg \Pi_u \Rightarrow P = 0$.

Théorème :

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors tout endomorphisme de E admet un polynôme minimal.

Prop : Si u admet un polynôme minimal de degré p alors $\dim \mathbb{K}[u] = p$.

La famille $(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre et génératrice via division euclidienne.

IV. Polynôme et réduction

1°) Sous espace stable et polynôme en un endomorphisme

Prop : $\mathrm{Im}\, P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u et par tout endomorphisme v commutant avec u.

Prop : Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors F est stable pour tout polynôme en u et de plus : $P(u)_F = P(u_F)$.

Prop : Supposons F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u.
Si P et Q sont respectivement annulateur de u_F et u_G alors PQ est annulateur de u.

2°) Valeurs propres et polynômes annulateurs

Prop : Si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Théorème :

Si P est un polynôme annulateur de u alors toute valeur propre de u est racine de P.

Théorème : (hors-programme)

Si u admet un polynôme minimal Π_u alors les valeurs propres de u sont exactement les racines de Π_u.

3°) Lemme de décomposition des noyaux

Théorème :

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

Cor : Si $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux alors :

$$\ker\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(u) = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} \ker P_i(u).$$